Ejercicio 11. Comprobar, usando la proposición 4.12 de las trasparencias, si S = $\{x^3 + x - 1, x - 2, -x^3 + 3x + 3\}$ es un conjunto linealmente independiente en $P_3(\mathbb{Z}_5)$.

Esta proposición nos asegura que un conjunto de r vectores es linealmente independiente si y sólo si la matriz cuyas columnas (o bien, filas) son las coordenadas de tales vectores respecto de una base dada es de rango r.

Así que primero tomamos una base del espacio $P_3(\mathbb{Z}_5)$, por ejemplo, la más simple, la base canónica que como sabemos está formada por los polinomios B = $\{1, x, x^2, x^3\}$. Con respecto

Con respecto a esta base los vectores tienen como coordenadas los coeficiente, comenzando con el termino independiente y terminando con el coeficiente de grado 3. Así:

$x^3 + x - 1 = x^3 + x + 4 = (4, 1, 0, 1)_B$

$x - 2 = x + 3 = (3, 1, 0, 0)_B$

$-x^3 + 3x + 3 = 4x^3 + 3x + 3 = (3, 3, 0, 4)_B$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 9 - 3 - 12 = 10 = 0$$

Tenemos que calcular el rango de la matriz cuyas columnas sean estas coordenadas

Por tanto, esta matriz es de rango menor que 3. De echo, es de rango 2.

Por tanto, S es un conjunto linealmente dependiente en $P_3(\mathbb{Z}_5)$.